



БЕЗКОШТОВНІ
ОНЛАЙН КУРСИ

ОРГАНІЗАТОРИ



Науковий
Ліцей
Чурюмова



ЛУГАНСЬКИЙ
ПЕДАГОГІЧНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ
і.м. Т. ШЕВЧЕНКА



фонд
ВІДКРИТА
ПОЛІТИКА



Науковий
Ліцей
Чурюмова



фонд
ВІДКРИТА
ПОЛІТИКА



Донецький національний технічний університет

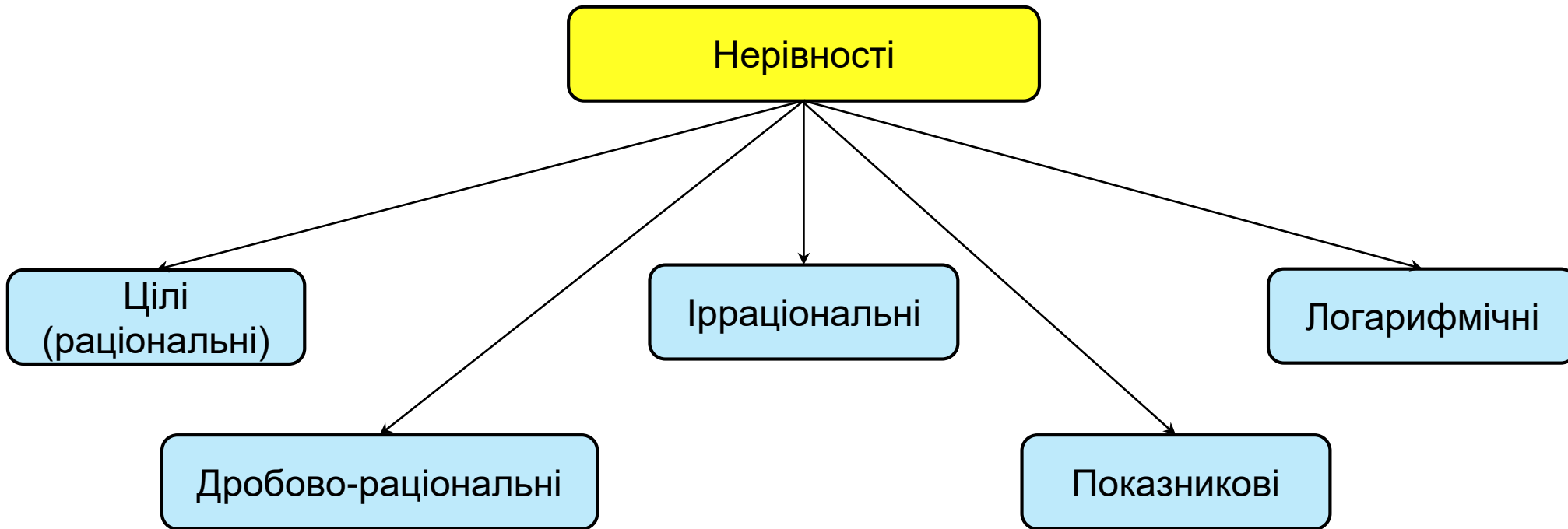


ЛУГАНСЬКИЙ
НАЦІОНАЛЬНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ
ім. Т. ШЕВЧЕНКА



Лекція 3. Види нерівностей та способи їх розв'язання

Юлія НОВІКОВА, к.ф.-м.н.,
доцент кафедри ВМФ, ДВНЗ «ДонНТУ»



Нерівністю з однією змінною називають два вирази зі змінною, сполучені знаком:

$>$, $<$, \geq , \leq ,

тобто нерівності виду

$$f(x) > g(x), \quad f(x) < g(x), \quad f(x) \geq g(x), \quad f(x) \leq g(x),$$

де $f(x)$ і $g(x)$ – деякі функції.



Розв'язати нерівність означає знайти всі її розв'язки або довести, що їх не існує.

Ідея розв'язування нерівностей полягає в заміні нерівності рівносильною їй більш простою нерівністю.

Дві нерівності називають *рівносильними*, якщо множини їх розв'язків співпадають.



Науковий
Ліцей
Чурюмова



фонд
ВІДКРИТА
ПОЛІТИКА



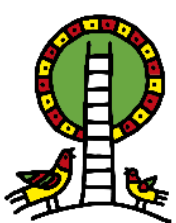
ЛУГАНСЬКИЙ
НАЦІОНАЛЬНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ
ім. Т. ШЕВЧЕНКА



Донецький національний технічний університет

Рівносильні перетворення нерівностей

- 1) Будь-який член нерівності можна перенести з однієї частини в іншу з протилежним знаком, залишивши при цьому знак нерівності без змін.
- 2) Обидві частини нерівності можна помножити або поділити на одне й те саме додатне число або вираз, залишивши при цьому знак нерівності без змін.
- 3) Обидві частини нерівності можна помножити або поділити на одне й те саме від'ємне число або вираз, змінивши при цьому знак нерівності на протилежний.



Науковий
Ліцей
Чурюмова



фонд
ВІДКРИТА
ПОЛІТИКА



ЛУГАНСЬКИЙ
НАЦІОНАЛЬНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ
ім. Т. ШЕВЧЕНКА



Цілі нерівності

Нерівності з однією змінною, ліва і права частини яких є цілі вирази, називаються *цілими нерівностями*.

Раціональними називають нерівності виду

$$P_n(x) > 0,$$

де $P_n(x)$ – многочлен стандартного виду.

Наприклад: $x^2 - 10x + 18 \leq 0,$ $5x - 3 \geq 0.$



Науковий
Ліцей
Чурюмова



фонд
ВІДКРИТА
ПОЛІТИКА



ЛУГАНСЬКИЙ
НАЦІОНАЛЬНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ
ІМ. Т. ШЕВЧЕНКА



Донецький національний технічний університет

Лінійні нерівності

$ax > b$, x – змінна, a та b – відомі числа.

Алгоритм розв'язування

- Перенести невідомі в ліву частину нерівності, а відомі – у праву.
- Якщо $a \neq 0$, то обидві частини нерівності поділити на a . Число, отримане в правій частині нерівності, нанести на числову пряму виколотою або зафарбованою точкою, залежно від знака розв'язуваної нерівності.
- Якщо $a = 0$, то розв'язком нерівності є або множина всіх дійсних чисел, або нерівність розв'язків не має взагалі. Результат залежить від значення b .



Науковий
Ліцей
Чурюмова



фонд
ВІДКРИТА
ПОЛІТИКА



ЛУГАНСЬКИЙ
НАЦІОНАЛЬНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ
ІМ. Т. ШЕВЧЕНКА



Донецький національний технічний університет

Приклади

$$\begin{aligned}1) \quad & 2x - 5 \leq 7 - x, \\ & 2x + x \leq 7 + 5, \\ & 3x \leq 12, \\ & x \leq 4.\end{aligned}$$

Відповідь: $x \in (-\infty; 4]$.

$$\begin{aligned}2) \quad & 3 - 2x < 5, \\ & -2x < 5 - 3, \\ & -2x < 2, \\ & x > -1.\end{aligned}$$

Відповідь: $x \in (-1; +\infty)$.

Квадратні нерівності

$$ax^2 + bx + c > 0, \quad x - \text{змінна}, \quad a, b, c - \text{відомі числа } (a \neq 0).$$

Розв'язування такої нерівності зводиться до відшукування проміжків, на яких відповідна квадратна функція набуває додатних або від'ємних значень, в залежності від знака нерівності.

Приклад

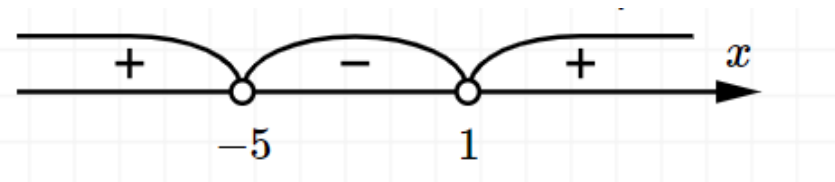
Розв'яжіть нерівність: $x^2 + 4x - 5 < 0$.

Графіком функції $y = x^2 + 4x - 5$ є парабола, гілки якої напрямлені вгору.

Знайдемо нулі функції за теоремою Вієта:

$$x^2 + 4x - 5 = 0,$$

$$x_1 = -5, \quad x_2 = 1.$$



Функція набуває від'ємних значень при $x \in (-5; 1)$.

Метод інтервалів для розв'язування нерівностей

$$f(x) > 0$$

Алгоритм розв'язування

1. Знаходимо нулі функції $f(x) = 0$;
2. Наносимо нулі функції на числову пряму;
3. Визначаємо знак функції $y = f(x)$ на кожному з інтервалів;
4. Записуємо відповідь відповідно до знака нерівності.

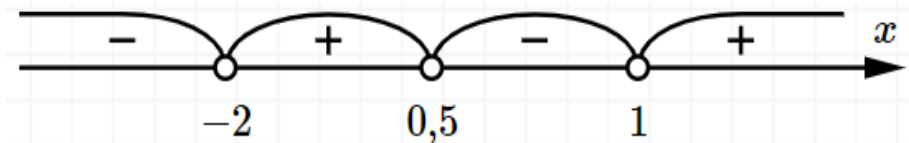
Приклад

Розв'яжіть нерівність: $(2x-1)(x+2)(x-1) < 0$.

$$(2x-1)(x+2)(x-1) = 0,$$

$$x = 0,5, \quad x = -2, \quad x = 1.$$

Нанесемо нулі функції на числову пряму та визначимо знак функції на кожному з інтервалів:



$$x \in (-\infty; -2) \cup (0,5; 1).$$

Відповідь: $x \in (-\infty; -2) \cup (0,5; 1)$.



Нерівності з модулем

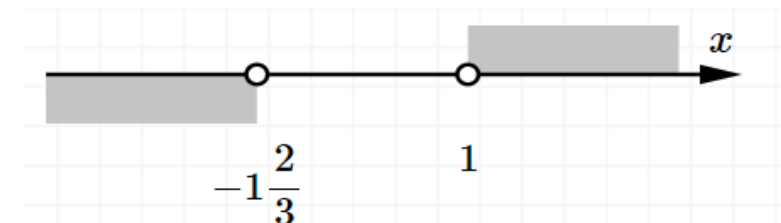
$$|f(x)| > a,$$

- при $a < 0$ розв'язком нерівності є всі дійсні числа, при яких $f(x)$ визначена;
- при $a \geq 0$
$$\begin{cases} f(x) > a, \\ f(x) < -a. \end{cases}$$

Приклад. Розв'яжіть нерівність: $|3x + 1| > 4$.

$$\begin{cases} 3x + 1 > 4, \\ 3x + 1 < -4, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x > 3, \\ 3x < -5, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1, \\ x < -\frac{5}{3}. \end{cases}$$

Відповідь: $x \in \left(-\infty; -\frac{5}{3}\right) \cup (1; +\infty)$.





$$|f(x)| < a,$$

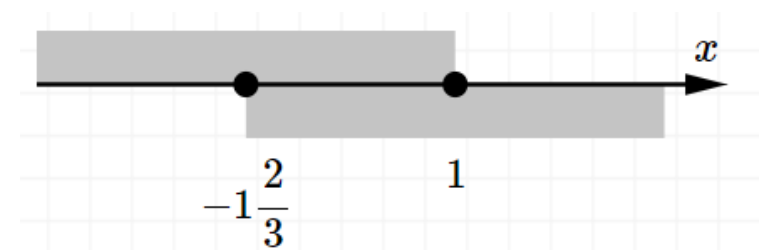
- при $a < 0$ нерівність розв'язків не має;

- при $a \geq 0$
$$\begin{cases} f(x) < a, \\ f(x) > -a. \end{cases}$$

Приклад. Розв'яжіть нерівність: $|3x + 1| \leq 4$.

$$\begin{cases} 3x + 1 \leq 4, \\ 3x + 1 \geq -4, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x \leq 3, \\ 3x \geq -5, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1, \\ x \geq -\frac{5}{3}. \end{cases}$$

Відповідь: $x \in \left[-\frac{5}{3}; 1\right]$.

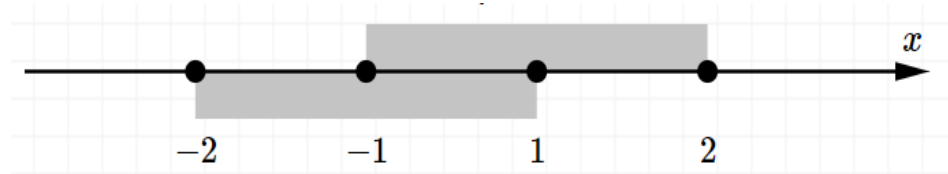


$$|f(x)| > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x), \\ f(x) < -g(x). \end{cases}$$

$$|f(x)| < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > -g(x). \end{cases}$$

Приклад. Розв'яжіть нерівність: $|x| \geq x^2 - 2$.

$$\begin{cases} x \geq x^2 - 2, \\ x \leq -x^2 + 2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 2 \leq 0, \\ x^2 + x - 2 \leq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(x+1) \leq 0, \\ (x+2)(x-1) \leq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-1; 2], \\ x \in [-2; 1], \end{cases}$$



Відповідь: $x \in [-2; 2]$.



Науковий
Ліцей
Чурюмова



фонд
ВІДКРИТА
ПОЛІТИКА



ЛУГАНСЬКИЙ
НАЦІОНАЛЬНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ
ІМ. Т. ШЕВЧЕНКА



Донецький національний технічний університет

$$|f(x)| > |g(x)| \Leftrightarrow f^2(x) > g^2(x)$$

Приклад. Розв'яжіть нерівність: $|x - 2| > |x|$.

$$|x - 2| > |x| \Leftrightarrow (x - 2)^2 > x^2,$$

$$x^2 - 4x + 4 > x^2,$$

$$-4x > -4,$$

$$x < 1.$$

Відповідь: $x \in (-\infty; 1)$.



Науковий
Ліцей
Чурюмова



фонд
ВІДКРИТА
ПОЛІТИКА



ЛУГАНСЬКИЙ
НАЦІОНАЛЬНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ
ІМ. Т. ШЕВЧЕНКА



Донецький національний технічний університет

Метод інтервалів (проміжків)

- 1) Знаходимо нулі підмодульних функцій, враховуючи ОДЗ.
- 2) Розбиваємо ОДЗ на інтервали нулями підмодульних функцій.
- 3) Розв'язуємо нерівність на кожному з інтервалів та об'єднуємо усі розв'язки.



Науковий
Ліцей
Чурюмова



фонд
ВІДКРИТА
ПОЛІТИКА



ЛУГАНСЬКИЙ
НАЦІОНАЛЬНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ
ІМ. Т. ШЕВЧЕНКА

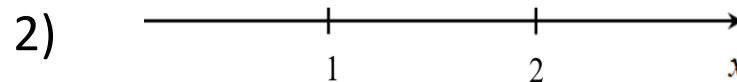


Приклад

Розв'яжіть нерівність: $|x - 1| + |x - 2| > x + 3$.

1) $x - 1 = 0,$
 $x = 1,$

$x - 2 = 0,$
 $x = 2.$



3) Розв'яжемо нерівність на кожному з проміжків:

а) $\begin{cases} x < 1, \\ 1 - x - x + 2 > x + 3, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1, \\ x < 0, \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty; 0).$

б) $\begin{cases} 1 \leq x \leq 2, \\ x - 1 - x + 2 > x + 3, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 2, \\ x < -2, \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset.$

в) $\begin{cases} x > 2, \\ x - 1 + x - 2 > x + 3, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2, \\ x > 6, \end{cases} \Leftrightarrow x \in (6; +\infty).$

Відповідь: $x \in (-\infty; 0) \cup (6; +\infty).$

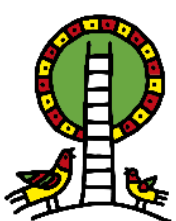
Дробово-раціональні нерівності

Нерівності виду $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$, де $f(x)$ і $g(x)$ – многочлени, називають *дробово-раціональними*.

Шляхом рівносильних перетворень дробово-раціональну нерівність зводять до раціональної:

$$\frac{f(x)}{g(x)} > 0 \Leftrightarrow f(x) \cdot g(x) > 0.$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \cdot g(x) \geq 0, \\ g(x) \neq 0. \end{cases}$$



Науковий
Ліцей
Чурюмова



фонд
ВІДКРИТА
ПОЛІТИКА



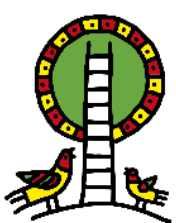
ЛУГАНСЬКИЙ
НАЦІОНАЛЬНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ
ім. Т. ШЕВЧЕНКА



Донецький національний технічний університет

Алгоритм розв'язування дробово-раціональних нерівностей

1. Усі доданки перенести у ліву частину та звести до спільного знаменника.
2. Розкласти на множники та шляхом рівносильних перетворень звести нерівність до раціональної.
3. Розв'язати отриману нерівність методом інтервалів.
4. Об'єднати проміжки, що відповідають знаку розв'язуваної нерівності.



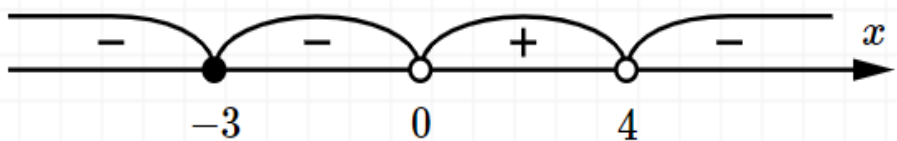
Приклад

Розв'яжіть нерівність: $\frac{(x+3)^2 \cdot (x^2 + x + 1)}{(4-x) \cdot x} \geq 0.$

$$\begin{cases} (x+3)^2 \cdot (x^2 + x + 1) \cdot (4-x) \cdot x \geq 0, \\ (4-x) \cdot x \neq 0. \end{cases}$$

$$\begin{array}{llll} x+3=0, & x^2+x+1=0, & 4-x=0, & x=0. \\ x=-3, & x \in \emptyset, & x=4, & \end{array}$$

На числову вісь наносимо всі корені рівнянь, з урахуванням ОДЗ.



(точки 0 і 4 обертають знаменник в нуль, тому точки «виколоті»)

Визначимо знак функції на кожному інтервалі.

Відповідь: $x \in \{-3\} \cup (0; 4).$

Ірраціональні нерівності

Нерівності, які містять змінну під знаком радикала або в основі степеня з раціональним показником називають *ірраціональними*.

Наприклад:

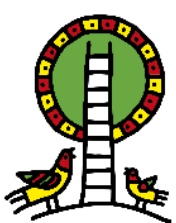
$$x + 5 \geq \sqrt{8x - 1},$$
$$x^{\frac{2}{3}} - x > 3.$$

Розв'язування ірраціональних нерівностей

Для розв'язування ірраціональних нерівностей виду $\sqrt[2n]{f(x)} < g(x)$ та $\sqrt[2n]{f(x)} > g(x)$ доцільно використовувати рівносильні перетворення:

$$\sqrt[2n]{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < (g(x))^{2n}. \end{cases}$$

$$\sqrt[2n]{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) < 0, \\ g(x) \geq 0, \\ f(x) > (g(x))^{2n}. \end{cases}$$



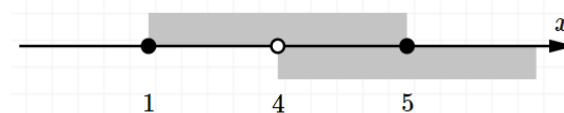
Приклади

1. Розв'яжіть нерівність: $\sqrt{-x^2 + 6x - 5} > 8 - 2x$.

$$\begin{cases} -x^2 + 6x - 5 \geq 0, \\ 8 - 2x < 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} -(x-1)(x-5) \geq 0, \\ x > 4, \end{cases}$$

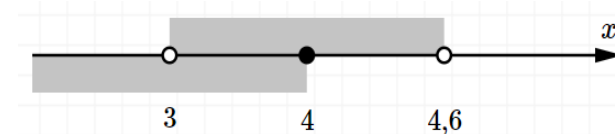
$$\begin{cases} 1 \leq x \leq 5, \\ x > 4, \end{cases}$$



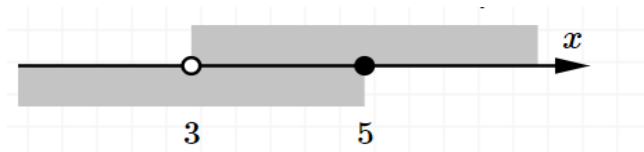
$$\begin{cases} 8 - 2x \geq 0, \\ -x^2 + 6x - 5 > (8 - 2x)^2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 4, \\ 5x^2 - 38x + 69 < 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 4, \\ 3 < x < 4,6 \end{cases}$$

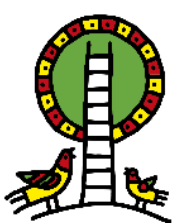


$$\begin{cases} x \in (4; 5], \\ x \in (3; 4]. \end{cases}$$



Об'єднаємо обидва розв'язки та отримаємо, що $x \in (3; 5]$.

Відповідь: $x \in (3; 5]$.



2. Розв'яжіть нерівність: $\sqrt{x+2} - \sqrt{5x} > 4x - 2$.

Знайдемо ОДЗ:
$$\begin{cases} x+2 \geq 0, \\ 5x \geq 0, \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 0.$$

Помножимо обидві частини нерівності на додатний вираз $\sqrt{x+2} + \sqrt{5x}$.

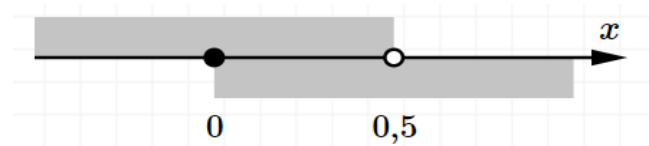
$$x+2-5x > (4x-2)(\sqrt{x+2} + \sqrt{5x}),$$

$$4x-2 + (4x-2)(\sqrt{x+2} + \sqrt{5x}) < 0,$$

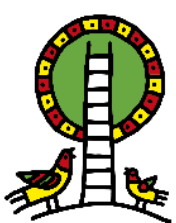
$$(4x-2)(1 + \sqrt{x+2} + \sqrt{5x}) < 0.$$

Враховуючи область визначення, а також те, що вираз у других дужках строго додатний, отримаємо систему

$$\begin{cases} 4x-2 < 0, \\ x \geq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{1}{2}, \\ x \geq 0. \end{cases}$$



Відповідь: $x \in [0; 0,5)$.



Науковий
Ліцей
Чурюмова



фонд
ВІДКРИТА
ПОЛІТИКА



ЛУГАНСЬКИЙ
НАЦІОНАЛЬНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ
ім. Т. ШЕВЧЕНКА



Донецький національний технічний університет

Показникові нерівності

Нерівності, які містять змінну в показнику степеня, називаються *показниковими*.

Наприклад:

$$5^{x+3} < 4,$$

$$2^{x^2} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{2x}.$$



Розв'язування показникових нерівностей

Розглянемо нерівності виду $a^{f(x)} > a^{g(x)}$, $a > 0$, $a \neq 1$.

- Якщо основа $a > 1$, то розв'язування таких нерівностей рівносильне розв'язуванню нерівності

$$f(x) > g(x).$$

- Якщо основа $0 < a < 1$, то розв'язування таких нерівностей рівносильне розв'язуванню нерівності

$$f(x) < g(x).$$



Науковий
Ліцей
Чурюмова



фонд
ВІДКРИТА
ПОЛІТИКА



ЛУГАНСЬКИЙ
НАЦІОНАЛЬНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ
ім. Т. ШЕВЧЕНКА



Донецький національний технічний університет

Приклади

1. Розв'яжіть нерівність: $2^{x^2-3} \cdot 5^{x^2-3} \leq 0,01 \cdot (10^{x-1})^3$.

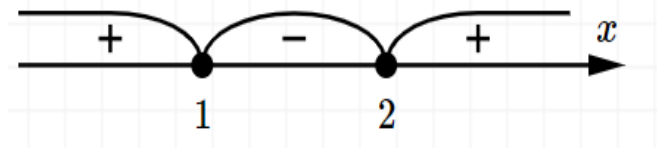
$$(2 \cdot 5)^{x^2-3} \leq 10^{-2} \cdot 10^{3x-3},$$

$$10^{x^2-3} \leq 10^{3x-5},$$

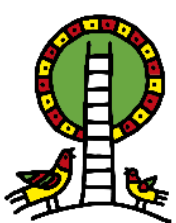
$$x^2 - 3 \leq 3x - 5,$$

$$x^2 - 3x + 2 \leq 0,$$

$$(x-1)(x-2) \leq 0.$$



Відповідь: $x \in [1; 2]$.

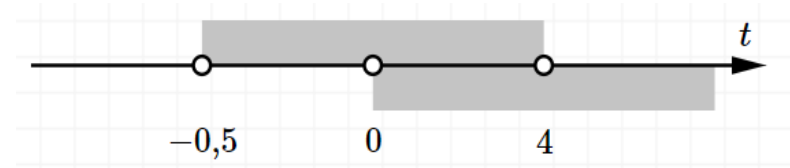


2. Розв'яжіть нерівність: $4^{-x+0.5} - 7 \cdot 2^{-x} - 4 < 0$.

$$(2^{-x})^2 \cdot 4^{0,5} - 7 \cdot 2^{-x} - 4 < 0,$$

Заміна: $2^{-x} = t > 0$.

$$\begin{cases} t > 0, \\ 2t^2 - 7t - 4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t > 0, \\ 2(t+0,5)(t-4) < 0, \end{cases} \Leftrightarrow 0 < t < 4.$$



Отже, початкова нерівність рівносильна нерівності

$$2^{-x} < 4 \Leftrightarrow 2^{-x} < 2^2 \Leftrightarrow -x < 2 \Leftrightarrow x > -2.$$

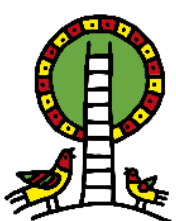
Відповідь: $x \in (-2; +\infty)$.

Логарифмічні нерівності

Нерівності, які містять змінну під знаком логарифма або в його основі, називають *логарифмічними*.

Наприклад:

$$\log_2(x + 4) < 3,$$
$$\log_{2x}(x^2 - 3x) > \log_{2x}(3x - 5).$$



Розв'язування логарифмічних нерівностей

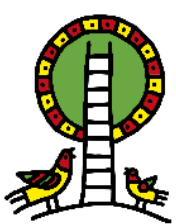
Розглянемо нерівності виду $\log_a f(x) > \log_a g(x)$, $a > 0$, $a \neq 1$.

- Якщо $a > 1$, то розв'язування таких нерівностей рівносильне розв'язуванню системи:

$$\begin{cases} f(x) > g(x), \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

- Якщо $0 < a < 1$, то розв'язування таких нерівностей рівносильне розв'язуванню системи:

$$\begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

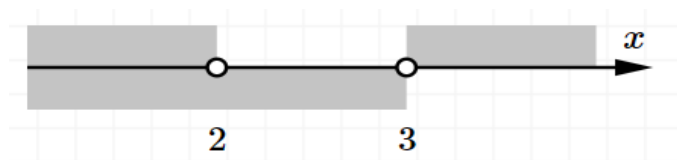


Приклади

1. Розв'яжіть нерівність: $\log_7 \frac{x-2}{x-3} < 0$.

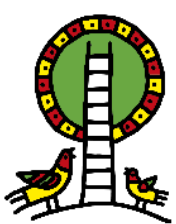
$$\log_7 \frac{x-2}{x-3} < \log_7 1, \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{x-2}{x-3} > 0, \\ \frac{x-2}{x-3} < 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x-2}{x-3} > 0, \\ \frac{1}{x-3} < 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(x-3) > 0, \\ (x-3) < 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; 2) \cup (3; +\infty), \\ x < 3. \end{cases}$$



У результаті перетину розв'язків отримаємо $x \in (-\infty; 2)$.

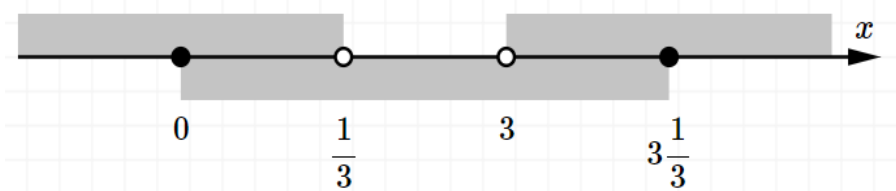
Відповідь: $x \in (-\infty; 2)$.



2. Розв'яжіть нерівність: $\log_{1/9} \left(x^2 - \frac{10}{3}x + 1 \right) \geq 0$.

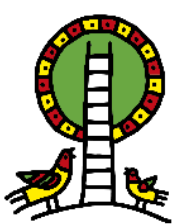
$$\log_{1/9} \left(x^2 - \frac{10}{3}x + 1 \right) \geq \log_{1/9} 1, \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x^2 - \frac{10}{3}x + 1 > 0, \\ x^2 - \frac{10}{3}x + 1 \leq 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x - \frac{1}{3} \right) (x - 3) > 0, \\ x \left(x - \frac{10}{3} \right) \leq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left(-\infty; \frac{1}{3} \right) \cup (3; +\infty), \\ x \in \left[0; \frac{10}{3} \right]. \end{cases}$$



У результаті перетину розв'язків отримаємо $x \in \left[0; \frac{1}{3} \right) \cup \left(3; \frac{10}{3} \right]$.

Відповідь: $x \in \left[0; \frac{1}{3} \right) \cup \left(3; \frac{10}{3} \right]$.



3. Розв'яжіть нерівність: $\frac{\lg^2 x - 3\lg x + 3}{\lg x - 1} < 1.$

Заміна: $\lg x = y,$

$$\frac{y^2 - 3y + 3}{y - 1} < 1 \Leftrightarrow \frac{y^2 - 4y + 4}{y - 1} < 0 \Leftrightarrow \frac{(y - 2)^2}{y - 1} < 0 \Leftrightarrow y < 1.$$

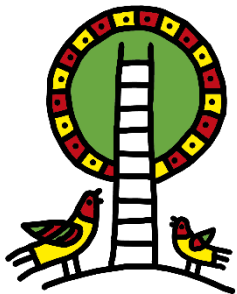
Повернемося до заміни та врахуємо ОДЗ логарифмічної функції:

$$\lg x < 1 \Leftrightarrow 0 < x < 10.$$

Відповідь: $x \in (0; 10).$

Список літератури

- 1. Математика:** Комплексна підготовка до зовнішнього незалежного оцінювання/ Уклад.: А.М. Капіносов, Г.І. Білоусова, А.Я. Гап'юк, Л.І. Кондратьєва, О.М. Мартинюк, С.В. Мартинюк, Л.І. Олійник, П.І. Ульшин, О.Й. Чиж. – Тернопіль: Підручники і посібники, 2013. – 568 с.



Науковий
Ліцей
Чурюмова



Контакти:

www.cigs.com.ua

cigs.liceum@gmail.com

+38 (067) 454 45 16

+38 (044) 288 50 75

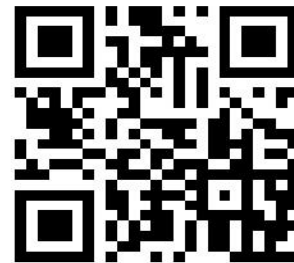
Адреса: м. Київ, вул. Левандовська, 5а

#GOЗНАМИ

#МрійДійРадій

#доступнаосвіта

#прокачай_вступай



Контакти:

www.donntu.edu.ua

vstup@donntu.edu.ua

+38(066)185-74-31

+380(06235)213-51

Адреса: м. Покровськ, пл. Шибанкова , 2

#Університет_твоєї_мрії #Почни_свій_шлях_з_нами