



БЕЗКОШТОВНІ
ОНЛАЙН КУРСИ

ОРГАНІЗАТОРИ



Науковий
Ліцей
Чурюмова



ЛУГАНСЬКИЙ
ПЕДАГОГІЧНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ
і.м. Т. ШЕВЧЕНКА



фонд
ВІДКРИТА
ПОЛІТИКА



Науковий
Ліцей
Чурюмова



фонд
ВІДКРИТА
ПОЛІТИКА

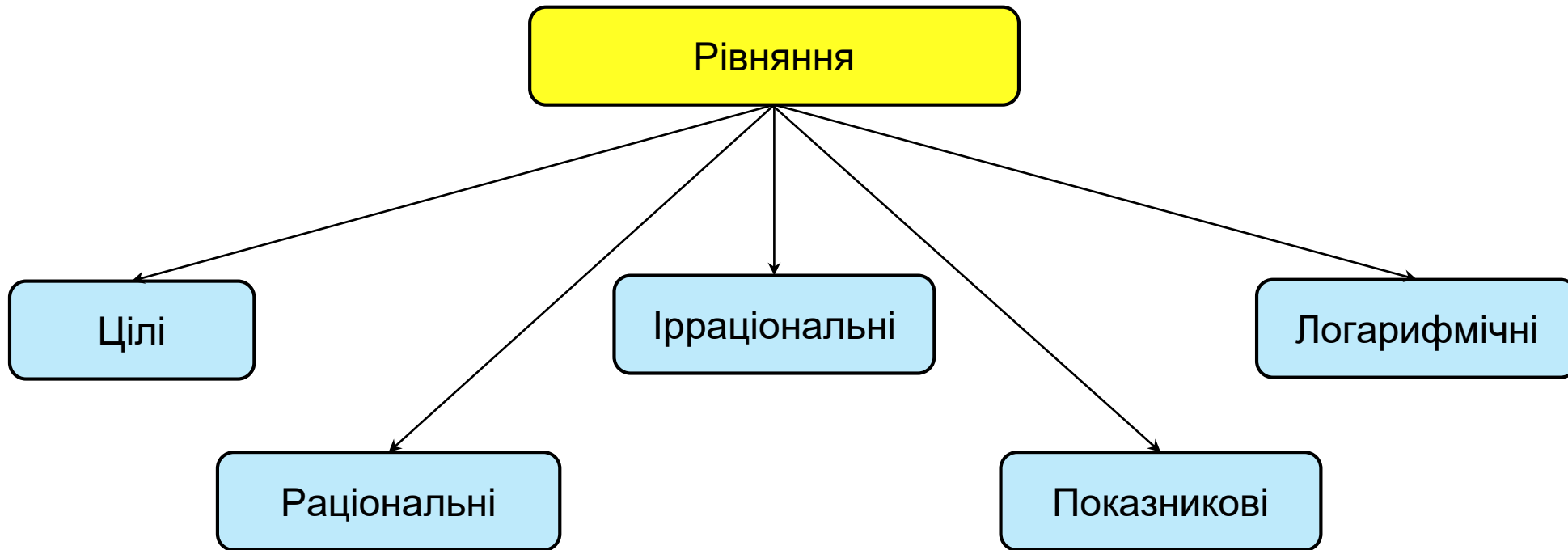


ЛУГАНСЬКИЙ
НАЦІОНАЛЬНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ
ім. Т. ШЕВЧЕНКА



Лекція 2. Види рівнянь та способи їх розв'язання

Юлія **НОВІКОВА**, к.ф.-м.н.,
доцент кафедри ВМФ, ДВНЗ «ДонНТУ»





Науковий
Ліцей
Чурюмова



фонд
ВІДКРИТА
ПОЛІТИКА



ЛУГАНСЬКИЙ
НАЦІОНАЛЬНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ
ім. Т. ШЕВЧЕНКА



Донецький національний технічний університет

Рівнянням з однією змінною називається рівність, яка містить змінну:

$$f(x) = 0.$$

Коренем рівняння (розв'язком) називають таке значення змінної $x = x_0$, при якому це рівняння перетворюється на правильну числову рівність.

Два рівняння називають **рівносильними**, якщо вони мають одні й ті самі корені або не мають коренів. Знак рівносильності рівнянь \Leftrightarrow .



Науковий
Ліцей
Чурюмова



фонд
ВІДКРИТА
ПОЛІТИКА



ЛУГАНСЬКИЙ
НАЦІОНАЛЬНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ
ім. Т. ШЕВЧЕНКА



Донецький національний технічний університет

Рівносильні перетворення рівнянь

- 1) Будь-який член рівняння можна перенести з однієї частини рівняння до іншої з протилежним знаком.
- 2) Обидві частини рівняння можна помножити або поділити на одне й те саме відмінне від нуля число або вираз.
- 3) До обох частин рівняння можна додати (відняти) одне й те саме число.

Цілі рівняння

Рівняння з однією змінною, ліва і права частини якого є цілі вирази, називається **цілим рівнянням**. Будь-яке ціле рівняння можна замінити рівносильним рівнянням виду $P_n(x) = 0$, де $P_n(x)$ – многочлен стандартного виду.

Наприклад: $x^3 + 5x^2 + 3 = 0$,

$$(x - 3)(x - 5) = 2x - 3 \Leftrightarrow x^2 - 10x + 18 = 0.$$



Науковий
Ліцей
Чурюмова



фонд
ВІДКРИТА
ПОЛІТИКА



ЛУГАНСЬКИЙ
НАЦІОНАЛЬНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ
ІМ. Т. ШЕВЧЕНКА



Донецький національний технічний університет

Лінійні рівняння з однією змінною

$ax = b$, x – змінна, a та b – відомі числа.

Якщо $a \neq 0$, то $x = \frac{b}{a}$ – єдиний корінь,

якщо $a = 0$, $b \neq 0$, то рівняння не має коренів,

якщо $a = 0$, $b = 0$, то корені рівняння – всі дійсні числа.



Науковий
Ліцей
Чурюмова



фонд
ВІДКРИТА
ПОЛІТИКА



ЛУГАНСЬКИЙ
НАЦІОНАЛЬНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ
ІМ. Т. ШЕВЧЕНКА



Донецький національний технічний університет

Приклади

$$1) \quad 5x - 3 = 0 \Leftrightarrow 5x = 3 \Rightarrow x = 0,6.$$

$$2) \quad 4x + 5 = 4(x - 1),$$

$$4x - 4x = -5 - 4,$$

$$0x = -9 \Rightarrow x \in \emptyset.$$

$$3) \quad 3(x - 2) = 3x - 6,$$

$$3x - 6 = 3x - 6,$$

$$0x = 0 \Rightarrow x \in \mathbf{R}.$$

Квадратні рівняння з однією змінною

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad x - \text{змінна}, \quad a, b, c - \text{відомі числа} \quad (a \neq 0).$$

Дискримінант квадратного рівняння:

$$D = b^2 - 4ac,$$

якщо $D > 0$, то $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$,

якщо $D = 0$, то $x = \frac{-b}{2a}$,

якщо $D < 0$, то рівняння не має дійсних коренів.



Науковий
Ліцей
Чурюмова



фонд
ВІДКРИТА
ПОЛІТИКА



ЛУГАНСЬКИЙ
НАЦІОНАЛЬНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ
ІМ. Т. ШЕВЧЕНКА



Донецький національний технічний університет

Приклад

$$3x^2 + 4x - 7 = 0,$$

$$D = 4^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-7) = 100, \quad \sqrt{D} = 10,$$

$$x_1 = \frac{-4 - 10}{2 \cdot 3} = -\frac{7}{3},$$

$$x_2 = \frac{-4 + 10}{6} = 1.$$

Теорема Вієта

(для зведеного квадратного рівняння ($a=1$))

$$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = c, \\ x_1 + x_2 = -b. \end{cases}$$

Приклад

Знайти $x_1^2 + x_2^2$, де x_1, x_2 – корені рівняння $x^2 - 12x + 13 = 0$.

За теоремою Вієта: $x_1 + x_2 = 12$ і $x_1 \cdot x_2 = 13$.

Тоді $(x_1 + x_2)^2 = 144 \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = 144 - 2x_1x_2$,

$$x_1^2 + x_2^2 = 144 - 2 \cdot 13 = 118.$$



Науковий
Ліцей
Чурюмова



фонд
ВІДКРИТА
ПОЛІТИКА



ЛУГАНСЬКИЙ
НАЦІОНАЛЬНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ
ІМ. Т. ШЕВЧЕНКА



Донецький національний технічний університет

Рівняння з модулями

$$|f(x)| = a \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = a, \\ f(x) = -a. \end{cases}$$

$$|5 - 2x| = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} 5 - 2x = 3, \\ 5 - 2x = -3; \end{cases} \begin{cases} x = 1, \\ x = 4. \end{cases}$$

Розкриття модуля за
означенням

$$|3 - x| = 2x - 3 \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} 3 - x \geq 0; \\ 3 - x = 2x - 3; \end{cases} \\ \begin{cases} 3 - x < 0; \\ -3 + x = 2x - 3; \end{cases} \end{cases} \begin{cases} \begin{cases} x \leq 3; \\ x = 2; \end{cases} \\ \begin{cases} x > 3; \\ x = 0; \end{cases} \end{cases} x = 2.$$



Піднесення обох частин рівняння до квадрата

$$|2x - 1| = |x + 1| \Leftrightarrow (2x - 1)^2 = (x + 1)^2,$$

$$3x^2 - 6x = 0,$$

$$x(x - 2) = 0,$$

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 2.$$

Метод інтервалів (проміжків)

- 1) Прирівнюємо до нуля вирази, які стоять під знаком модуля.
- 2) Отримані значення відкладаємо на числовій прямій.
- 3) Розв'язуємо рівняння на кожному з інтервалів.



Науковий
Ліцей
Чурюмова



фонд
ВІДКРИТА
ПОЛІТИКА



ЛУГАНСЬКИЙ
НАЦІОНАЛЬНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ
ім. Т. ШЕВЧЕНКА



Донецький національний технічний університет

Приклад

Розв'яжіть рівняння: $|6 - 3x| + |x - 3| = 7$.

1) $6 - 3x = 0, \quad x - 3 = 0,$
 $x = 2, \quad x = 3.$



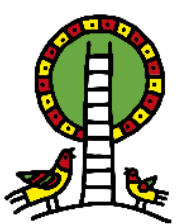
3) Розв'яжемо рівняння на кожному з проміжків:

а) $x \in (-\infty; 2]$: $6 - 3x + 3 - x = 7,$
 $x = 0,5 \quad (x = 0,5 \in (-\infty; 2]).$

б) $x \in (2; 3]$: $-6 + 3x - x + 3 = 7,$
 $x = 5 \quad (x = 5 \notin (2; 3]).$

в) $x \in (3; +\infty)$: $-6 + 3x + x - 3 = 7,$
 $x = 4 \quad (x = 4 \in (3; +\infty)).$

Відповідь: $x = 0,5; \quad x = 4.$



Науковий
Ліцей
Чурюмова



фонд
ВІДКРИТА
ПОЛІТИКА



ЛУГАНСЬКИЙ
НАЦІОНАЛЬНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ
ім. Т. ШЕВЧЕНКА



Донецький національний технічний університет

Раціональні рівняння

Рівняння виду $f(x) = g(x)$ називається *раціональним*, якщо $f(x)$ і $g(x)$ – раціональні вирази.

Якщо хоча б один із цих виразів дробовий, то рівняння називають *дробово-раціональним*.

Наприклад:
$$\frac{x-1}{7x-3} = \frac{4}{5+x}.$$



Науковий
Ліцей
Чурюмова



фонд
ВІДКРИТА
ПОЛІТИКА



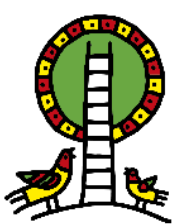
ЛУГАНСЬКИЙ
НАЦІОНАЛЬНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ
ім. Т. ШЕВЧЕНКА



Донецький національний технічний університет

Схема розв'язування дробово-раціональних рівнянь

1. Знайти ОДЗ рівняння.
2. Звести до спільного знаменника усі дроби, що входять у рівняння.
3. Помножити обидві частини рівняння на спільний знаменник.
4. Розв'язати одержане ціле рівняння.
5. Виключити розв'язки, які не входять до ОДЗ.



Приклад

Розв'яжіть рівняння: $\frac{x^2 + 1}{x - 4} - \frac{x^2 - 1}{x + 3} = 23.$

ОДЗ: $x \neq -3, x \neq 4.$

$$(x^2 + 1)(x + 3) - (x^2 - 1)(x - 4) = 23(x - 4)(x + 3),$$

$$x^3 + 3x^2 + x + 3 - x^3 + 4x^2 + x - 4 = 23x^2 - 23x - 276,$$

$$16x^2 - 25x - 275 = 0, \quad D = 18225 = 135^2,$$

$$x_1 = \frac{25 - 135}{32} = -\frac{55}{16}, \quad x_2 = \frac{25 + 135}{32} = 5.$$

$$x_1, x_2 \in \text{ОДЗ}$$

Відповідь: $-\frac{55}{16}; 5.$

Ірраціональні рівняння

Рівняння називається *ірраціональним*, якщо воно містить змінну під знаком кореня (радикала) або в основі степеня з раціональним показником.

Наприклад:

$$x + 5 = \sqrt{8x - 1},$$

$$x^{\frac{2}{3}} - 5 = 3.$$



Науковий
Ліцей
Чурюмова



фонд
ВІДКРИТА
ПОЛІТИКА



ЛУГАНСЬКИЙ
НАЦІОНАЛЬНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ
ім. Т. ШЕВЧЕНКА

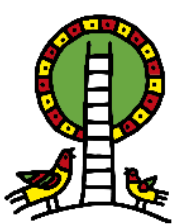


Донецький національний технічний університет

Методи розв'язування ірраціональних рівнянь

1. Метод піднесення обох частин рівняння до одного й того ж степеня.
2. Метод введення нової змінної.

Зауваження. При розв'язуванні ірраціонального рівняння, яке містить парні степені радикалів, або знаходять ОДЗ, або роблять перевірку.



Приклади

1. Піднесення обох частин рівняння до одного степеня

Розв'яжіть рівняння: $x + \sqrt{x + 20} = 22$.

$$\sqrt{x + 20} = 22 - x,$$

$$\left(\sqrt{x + 20}\right)^2 = (22 - x)^2$$

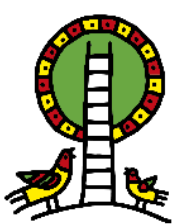
$$x + 20 = 484 - 44x + x^2, \quad x^2 - 45x + 464 = 0,$$

$$D = 45^2 - 4 \cdot 1 \cdot 464 = 169 = 13^2.$$

$$x_1 = \frac{45 - 13}{2} = 16, \quad x_2 = \frac{45 + 13}{2} = 29.$$

Перевіркою встановлюємо, що $x_2 = 29$ не є коренем рівняння.

Відповідь: 16.



2. Метод заміни змінної

Розв'яжіть рівняння: $\sqrt{x^2 - 3x + 5} + x^2 = 3x + 7$.

$$\sqrt{x^2 - 3x + 5} = -(x^2 - 3x + 5) + 12. \quad \text{Заміна: } x^2 - 3x + 5 = t,$$

$$\sqrt{t} = -t + 12,$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} t \geq 0, \\ -t + 12 \geq 0, \end{cases} \quad \begin{cases} t \geq 0, \\ t \leq 12, \end{cases} \quad t \in [0; 12].$$

$$t = (-t + 12)^2, \quad t^2 - 25t + 144 = 0,$$

$$D = 25^2 - 4 \cdot 1 \cdot 144 = 49 = 7^2, \quad t_1 = \frac{25 - 7}{2} = 9, \quad t_2 = \frac{25 + 7}{2} = 16 \notin \text{ОДЗ}.$$

При $t = 9$, маємо $x^2 - 3x + 5 = 9 \Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0$.

За теоремою Вієта: $x_1 = -1, x_2 = 4$.

Перевіркою встановлено, що обидва корені задовольняють рівняння.

Відповідь: $-1; 4$.

Показникові рівняння

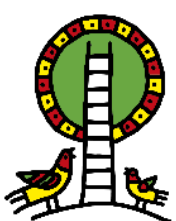
Рівняння, які містять змінну в показнику степеня, називаються **показниковими** рівняннями. Найпростішим показниковим рівнянням називається рівняння виду:

$$a^x = b, \quad a > 0, \quad a \neq 1.$$

Якщо $b > 0$, то розв'язком рівняння є $x = \log_a b$.

Якщо $b \leq 0$, то рівняння не має коренів.

Наприклад: $5^x = 4 \Rightarrow x = \log_5 4$.



Науковий
Ліцей
Чурюмова



фонд
ВІДКРИТА
ПОЛІТИКА



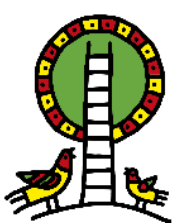
ЛУГАНСЬКИЙ
НАЦІОНАЛЬНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ
ім. Т. ШЕВЧЕНКА



Донецький національний технічний університет

Методи розв'язування показникових рівнянь

1. Логарифмування обох частин рівняння.
2. Метод зведення до однієї основи.
3. Винесення спільного множника за дужки.



Науковий
Ліцей
Чурюмова



фонд
ВІДКРИТА
ПОЛІТИКА



ЛУГАНСЬКИЙ
НАЦІОНАЛЬНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ
ім. Т. ШЕВЧЕНКА



Донецький національний технічний університет

Приклади

1. Зведення до однієї основи

Розв'яжіть рівняння: $\frac{0,2^{x-0,5}}{\sqrt{5}} = 5 \cdot 0,04^{x-1}$.

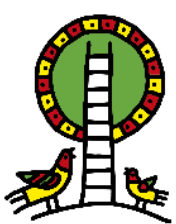
$$\frac{\left(\frac{1}{5}\right)^{x-0,5}}{5^{\frac{1}{2}}} = 5 \cdot \left(\frac{1}{25}\right)^{x-1}, \quad 5^{-x+0,5} \cdot 5^{-0,5} = 5 \cdot 5^{-2(x-1)},$$

$$5^{-x+0,5-0,5} = 5^{1-2(x-1)},$$

$$-x = 1 - 2(x-1),$$

$$x = 3.$$

Відповідь: 3.



Науковий
Ліцей
Чурюмова



фонд
ВІДКРИТА
ПОЛІТИКА



ЛУГАНСЬКИЙ
НАЦІОНАЛЬНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ
ім. Т. ШЕВЧЕНКА



Донецький національний технічний університет

2. Винесення спільного множника за дужки

Розв'яжіть рівняння: $3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} = 5^x + 5^{2+x}$.

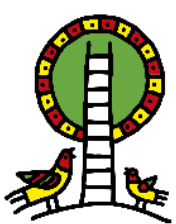
$$3^x + 3 \cdot 3^x + 3^2 \cdot 3^x = 5^x + 5^2 \cdot 5^x,$$

$$3^x (1 + 3 + 9) = 5^x (1 + 25),$$

$$13 \cdot 3^x = 26 \cdot 5^x, \quad \frac{3^x}{5^x} = \frac{26}{13},$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^x = 2, \quad x = \log_{\frac{3}{5}} 2.$$

Відповідь: $x = \log_{\frac{3}{5}} 2$.



Приклад

Розв'яжіть рівняння: $6 \cdot 3^{2x} - 13 \cdot 6^x + 6 \cdot 2^{2x} = 0$.

$$6 \cdot 3^{2x} - 13 \cdot 3^x \cdot 2^x + 6 \cdot 2^{2x} = 0 \quad | : 2^{2x}$$

$$6 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} - 13 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x + 6 = 0.$$

Заміна: $t = \left(\frac{3}{2}\right)^x$, $t > 0$.

$$6t^2 - 13t + 6 = 0, \quad D = 13^2 - 4 \cdot 6 \cdot 6 = 25, \quad t_1 = \frac{13-5}{12} = \frac{2}{3}, \quad t_2 = \frac{13+5}{12} = \frac{3}{2}.$$

Якщо $t = \frac{2}{3}$, то $\left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{2}{3}$, $\left(\frac{3}{2}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^{-1}$, $x = -1$.

Якщо $t = \frac{3}{2}$, то $\left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{3}{2}$, $\left(\frac{3}{2}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^1$, $x = 1$.

Відповідь: -1 ; 1 .

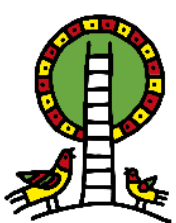
Логарифмічні рівняння

Рівняння, які містять змінну під знаком логарифма або в основі логарифма, називаються *логарифмічними* рівняннями.

Наприклад:

$$\log_2(x+4) = -3,$$

$$\log_{2x}(x^2 - 3x) = \log_{2x}(3x - 5).$$

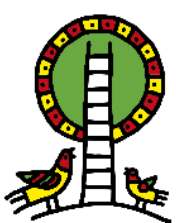


Найпростіші логарифмічні рівняння

$$1. \log_a f(x) = g(x) \quad (a > 0, a \neq 1) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0, \\ f(x) = a^{g(x)}. \end{cases}$$

$$2. \log_a f(x) = \log_a g(x) \quad (a > 0, a \neq 1) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0, & (g(x) > 0), \\ f(x) = g(x). \end{cases}$$

$$3. \log_{\varphi(x)} f(x) = \log_{\varphi(x)} g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0, & (g(x) > 0), \\ \varphi(x) > 0, \\ \varphi(x) \neq 1, \\ f(x) = g(x). \end{cases}$$



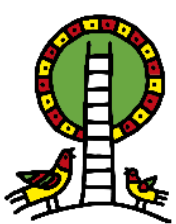
Приклади

$$1. \log_3 x = 2 \Leftrightarrow x = 3^2, x = 9.$$

$$2. \log_2(x-2) = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 > 0, \\ x-2 = 2^3, \end{cases} \begin{cases} x > 2, \\ x = 10, \end{cases} x = 10.$$

$$3. \log_2(2^{x+1} - 1) = x \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{x+1} - 1 > 0, \\ 2^{x+1} - 1 = 2^x, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2^{x+1} > 1, \\ 2^{x+1} - 2^x = 1, \end{cases} \begin{cases} 2^{x+1} > 2^0, \\ 2^x(2-1) = 1, \end{cases} \begin{cases} x+1 > 0, \\ 2^x = 2^0, \end{cases} \begin{cases} x > -1, \\ x = 0, \end{cases} x = 0.$$



$$4. \lg(2x^2 + 3x) = \lg(6x + 2),$$

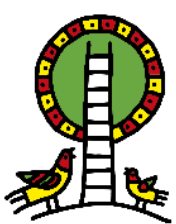
$$\begin{cases} 2x^2 + 3x = 6x + 2, \\ 6x + 2 > 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 2x^2 - 3x - 2 = 0, \\ 6x > -2, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = -0,5; \quad x_2 = 2, \\ x > -\frac{1}{3}, \end{cases} \quad x = 2.$$

Відповідь: 2.

$$5. \log_{x+4}(x^2 - 1) = \log_{x+4}(5 - x)$$

$$\begin{cases} x^2 - 1 = 5 - x, \\ 5 - x > 0, \\ x + 4 > 0, \\ x + 4 \neq 1. \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + x - 6 = 0, \\ 5 - x > 0, \\ x + 4 > 0, \\ x + 4 \neq 1. \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = -3, \quad x_2 = 2, \\ x < 5, \\ x > -4, \\ x \neq -3. \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = -3, \quad x_2 = 2, \\ x \in (-4; -3) \cup (-3; 5), \end{cases} \quad x = 2.$$

Відповідь: 2.



Приклад

$$3\log_3^2 x - 4\log_3 x - 4 = 0.$$

Заміна: $\log_3 x = t$.

$$3t^2 - 4t - 4 = 0, \quad D = (-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-4) = 64 = 8^2,$$

$$t_1 = \frac{4-8}{6} = -\frac{2}{3}, \quad t_2 = \frac{4+8}{6} = 2.$$

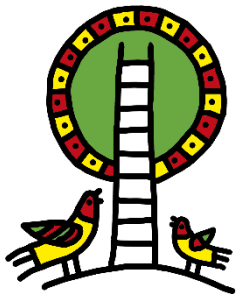
$$1) t = -\frac{2}{3} \Rightarrow \log_3 x = -\frac{2}{3} \Rightarrow x = 3^{-\frac{2}{3}}, \quad x = \frac{1}{\sqrt[3]{9}}.$$

$$2) t = 2 \Rightarrow \log_3 x = 2 \Rightarrow x = 3^2, \quad x = 9.$$

$$\text{Відповідь: } \frac{1}{\sqrt[3]{9}}, \quad 9.$$

Список літератури

- 1. Математика:** Комплексна підготовка до зовнішнього незалежного оцінювання/ Уклад.: А.М. Капіносов, Г.І. Білоусова, А.Я. Гап'юк, Л.І. Кондратьєва, О.М. Мартинюк, С.В. Мартинюк, Л.І. Олійник, П.І. Ульшин, О.Й. Чиж. – Тернопіль: Підручники і посібники, 2013. – 568 с.



Науковий
Ліцей
Чурюмова



Контакти:

www.cigs.com.ua

cigs.liceum@gmail.com

+38 (067) 454 45 16

+38 (044) 288 50 75

Адреса: м. Київ, вул. Левандовська, 5а

#GOЗНАМИ

#МрійДійРадій

#доступнаосвіта

#прокачай_вступай



Контакти:

www.donntu.edu.ua

vstup@donntu.edu.ua

+38(066)185-74-31

+380(06235)213-51

Адреса: м. Покровськ, пл. Шибанкова , 2

#Університет_твоєї_мрії #Почни_свій_шлях_з_нами